

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.Г. ШУХОВА»
(БГТУ им. В.Г. Шухова)

Вариационные принципы механики

Учебное пособие
для студентов специальностей 151000.62 – Технологические машины и
оборудование, 190100.62, 190109.65 – Наземные транспортно-
технологические комплексы

Белгород
2012

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.Г. ШУХОВА»
(БГТУ им. В.Г. Шухова)

Кафедра теоретической механики

Утверждено
научно-методическим советом
университета

Вариационные принципы механики

Учебное пособие
для студентов специальностей 151000.62 – Технологические машины и
оборудование, 190100.62, 190109.65 – Наземные транспортно-
технологические комплексы

Белгород
2012

УДК 624 (07)
ББК 30.12Я7
В 18

Составители: доц. А.В. Ахтямов
ст. преп. Л.Н. Спиридонова
ассистент Е.Н. Новикова

Рецензенты: к.т.н., доц. В.Я. Дуганов,
к.ф-м.н., доц. В.М. Никифоров

Вариационные принципы механики: учебное пособие для
В18 студентов специальностей 151000.62 – Технологические машины
и оборудование, 190100.62, 190109.65 – Наземные транспортно-
технологические комплексы / сост.: А.В. Ахтямов,
Л.Н.Спиридонова, Е.Н. Новикова. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2012.
– 57 с.

В пособии даны теоретические сведения по вариационным принципам механики, приведены примеры расчета механизмов. Разобран пример выполнения курсовой работы по теоретической механике. даны варианты заданий для курсовых работ.

УДК 624 (07)
ББК 30.12Я7

© Белгородский государственный
технологический университет
(БГТУ) им. В.Г. Шухова, 2012

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем учебном пособии рассматриваются наиболее общие вариационные принципы механики. При этом кратко изучается теоретическая сущность, и рассматриваются подробные примеры расчета механических систем с применением этих принципов. Значительную часть пособия занимает пример выполнения курсовой работы с использованием вариационных принципов механики. Данная курсовая работа является завершающей при изучении курса теоретической механики и потребует от студентов знаний по всем разделам механики. В заключении даны варианты заданий для курсовых работ. Надеемся, что пособие будет полезно всем, кто получает и интересуется теоретической механикой.

Глава 1. Вариационные принципы механики

В данном пособии рассматриваются некоторые из наиболее общих свойств движения несвободных систем материальных точек. Эти свойства выражаются вариационными принципами механики. Данные принципы имеют более широкий смысл, чем теоремы динамики. Из некоторых вариационных принципов механики можно найти, как следствия, основные теоремы динамики системы.

Базируясь на принципе возможных перемещений, получены известные методы сил и перемещений в сопротивлении материалов.

Принципы не всегда вносят новое физическое содержание в механику или упрощают практическое решение механических задач. Тем не менее, в ряде случаев они более удобны для анализа движения механических систем.

Первые основные принципы механики связаны с именами Галлелея, Ньютона, Лагранжа. В основу механики эти ученые положили понятия пространства, времени, силы и массы. Так принцип Галлелея-Ньютона определяет силу как причину, вызывающую движение материального тела. Законы Ньютона создают основу дальнейшего развития механики. С их помощью можно проанализировать любые механические движения.

Даламбер, Эйлер, Лагранж создали принцип, основанный на сравнении движений. Этот принцип изучает мгновенное состояние движения и возможные отклонения от этого состояния, допускаемые связями в данный момент времени (возможные перемещения).

Гамильтоном был предложен другой принцип, сравнивающий движения за конечный промежуток времени.

Французский математик Мопертюи сформулировал принцип, который назвал «общим законом природы». Согласно принципу Мопертюи, всякое изменение в природе происходит таким образом, что количество действия, необходимое на это изменение, является наименьшим. Природа как бы «экономит» свое действие. Под количеством действия Мопертюи понимал произведение массы точки на ее скорость и пройденный путь, то есть

Заслуга аналитического оформления этого принципа принадлежит швейцарскому математику и механику Леонарду Эйлеру. Он определил действие в виде интеграла

взятого по дуге траектории, соединяющей начальную и конечную точки. По Эйлеру, этот интеграл имеет наименьшее значение для любого отрезка истинной траектории по сравнению со смежными кривыми, имеющими те же концы.

Лагранж распространил принцип Эйлера на систему материальных точек.

1.1 Понятие вариации функции

Вариационные принципы механики, как следует из их названия, базируются на понятии вариации функции. Вариацией функции называется приращение функции, обусловленное изменением вида функции, при фиксированном значении аргумента. Так, при переходе от функции y к функции $y + \delta y$ вариация функции будет:

(1)

В отличие от вариации функции δy , дифференциал функции является главной частью приращения функции, образуемого за счет приращения аргумента δx .

На рис.1 изображен отрезок δx , численно равный вариации функции δy , который соответствует фиксированному значению аргумента x .

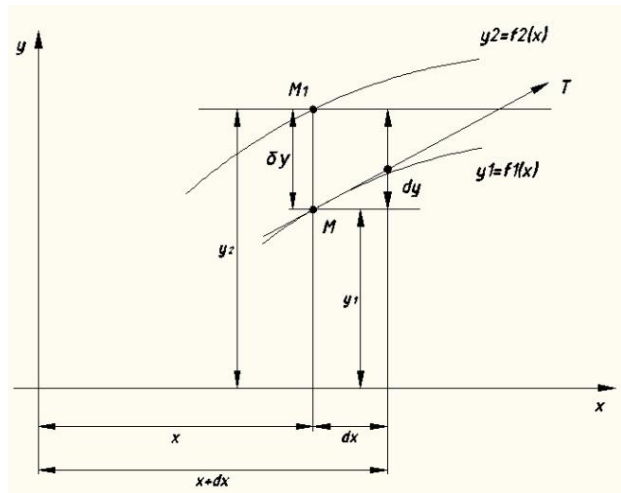


Рис. 1 Вариация функции

На этом рисунке показано, что отрезок, численно равный дифференциалу функции , соответствует приращенному значению аргумента .

Правила варьирования функций внешне подобны соответствующим правилам дифференцирования функций. Например: , где , , и т.д.

В вариационном исчислении наряду с задачами, в которых отыскивается экстремум некоторой функции , встречаются и такие, в которых необходимо отыскать экстремум такой переменной , которая сама зависит от выбора функции . Такие переменные называют функционалами.

В простейшем случае функционал представляется в виде интеграла , где и определяют интервал изменения аргумента .

Сравнивая функционал и функцию, можно заметить, что они являются переменными, однако первый зависит от вида функции , а вторая – от величины аргумента . В одном случае, изменяя вид

функции $y = f(x)$, т.е. варьируя функцию, мы изменяем величину функционала, а во втором – изменяя величину независимого переменного x , влияем на величину функции.

При отыскании экстремума функции мы отыскиваем такое значение аргумента x , которое сообщает функции $f(x)$ максимум или минимум.

В вариационных задачах необходимо отыскать такой вид функции $y = f(x)$, при котором функционал $J[y]$ приобретает максимальное или минимальное значение.

Классическим примером вариационной задачи является задача о брахистохроне – линии быстрого спуска, предложенная в 1696 г. И. Бернулли.

Методы решения вариационных задач, т.е. задач отыскания функций, сообщающих функционалу максимум или минимум, во многом сходны с исследованием функций на максимум и минимум.

В задачах на максимум и минимум независимому переменному x дается приращение Δx , равное дифференциалу dx . В вариационных задачах дается приращение (или вариация) δy искомой функции $y = f(x)$, равное $\delta y = f'(x) \Delta x$.

Если функция $y = f(x)$ достигает экстремума внутри заданного интервала значений аргумента x , дифференциал $dy = f'(x) dx$ равен нулю. Аналогично, если функционал достигает экстремума, то его вариация равна нулю: $\delta J = 0$.

После изложения некоторых общих математических понятий перейдем к рассмотрению сути некоторых вариационных принципов механики.

1.2 Свободные и несвободные системы, связи и их классификация

Рассматриваем движение системы P материальных точек относительно некоторой инерциальной системы координат.

Несвободной называется система материальных точек, на движение которых (координаты, скорости и ускорение) наложены некоторые ограничения (связи).

Связями называются физические тела, налагающие ограничения на координаты, скорости и ускорения точек материальной системы. Связи делятся на двухсторонние и односторонние.

Связи называются двухсторонними (удерживающими), если они препятствуют перемещениям материальных точек в некоторых направлениях, а также в направлениях прямо противоположных. Примером двухсторонней связи служит идеальный (невесомый, недеформированный) стержень, по концам которого размещены две материальные точки. Если одну из точек, например t . (рис. 2) закрепить, то вторая точка может перемещаться по кривой, лежащей на сфере радиуса стержня, т.е. координаты t . оказываются связанными зависимостью: . Тогда двухсторонняя геометрическая связь выражается соотношением между координатами точек системы:

(2)

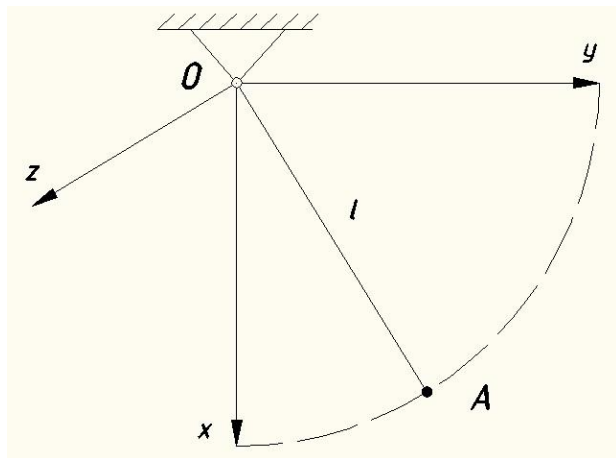


Рис. 2 Двухсторонняя связь

Связи называются односторонними (неудерживающими), если они препятствуют перемещениям материальных точек в некоторых направлениях, но допускают перемещение в прямо противоположных направлениях. Примером может служить нить (рис. 3). Уравнение односторонней связи имеет вид: . Таким образом односторонняя связь выражается неравенством вида:

(3)

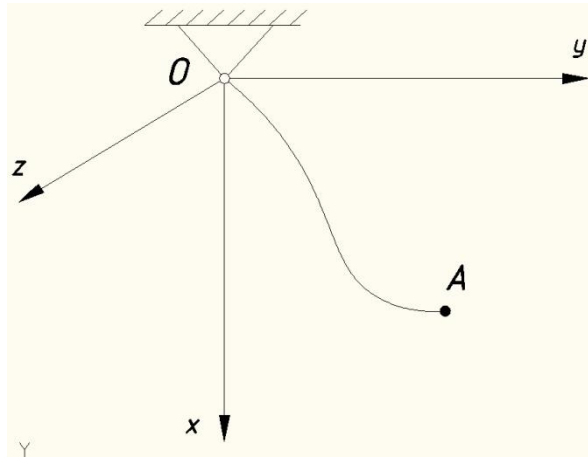


Рис. 3 Односторонняя связь

Связи делятся на нестационарные (зависящие от времени) и стационарные (не зависящие от времени).

Связь называется нестационарной, если в уравнение связи в явном виде входит время, т.е.

(4)

Например, в случае подъемного крана, поднимающего груз , связь, зависящая от времени, создается тросом (рис. 4). Так как груз может раскачиваться, уравнение связи имеет вид:

$$z = l \cos \theta$$

, т.е. содержит в явном виде время .

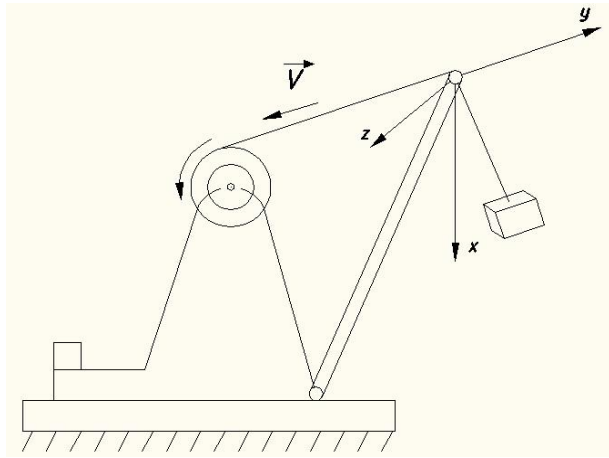


Рис. 4 Нестационарная связь

Связь называется стационарной, если время в явном виде не входит в уравнение связи.

Связи делятся на голономные и неголономные. Голономными (интегральными) называются связи, которые накладывают ограничения на положения точек материальной системы. Неголономными (неинтегрируемыми) называются связи, которые накладывают ограничения на скорости точек системы. Они выражают зависимость между координатами и скоростями точек системы. Уравнения таких связей не могут быть проинтегрированы.

Числом степеней свободы системы материальных точек, подчиненной голономным связям, называется число независимых параметров, однозначно определяющих положения точек системы. Например, твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, обладает одной степенью свободы, так как положение всех точек тела определяется углом поворота вокруг этой оси. Тело, совершающее плоское движение, имеет три степени свободы, так как положение любого его сечения, проведенного параллельно неподвижной плоскости, определяется координатами центра тяжести и углом поворота.

Системой с шестью степенями свободы является свободное твердое тело, так как его положение определяется шестью

независимыми параметрами: тремя координатами центра тяжести и тремя углами Эйлера.

На практике большинство механизмов является системами с одной степенью свободы. Рассматриваемый в данном пособии механизм прессования обладает одной степенью свободы.

Силы, с которыми связи ограничивают перемещения точек системы, называются силами реакций связей. Первой задачей расчета является определение сил реакций связей.

При расчете несвободных систем материальных точек пользуются принципом освобожденности от связей. Он заключается в том, что мысленно отбрасывают связи, наложенные на систему, заменяя их действие реакциями связей. При этом несвободная система материальных точек рассматривается как свободная, движущаяся под действием заданных сил и сил реакций связей.

Важными понятиями вариационных принципов механики являются понятия возможного и действительного перемещений точек системы.

Возможным называется перемещение точки из данного ее положения, допускаемое связями, наложенными на эту точку. Например, если точка находится на неподвижной горизонтальной плоскости, то возможным является любое воображаемое перемещение точки из данного положения по плоскости (рис. 5). если же эту точку связать с жестким стержнем, один конец закреплен на плоскости, то возможным будет перемещение точки по дуге окружности, центр которой расположен на закрепленном конце стержня, а радиус окружности равен длине этого стержня.

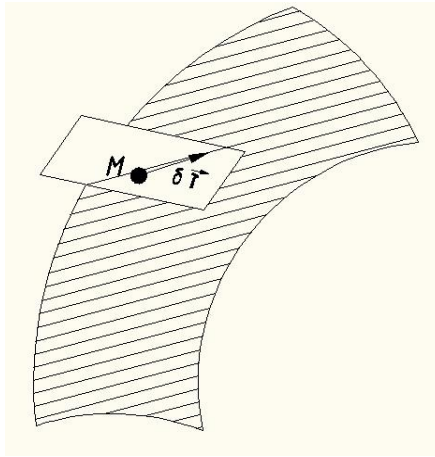


Рис. 5 Возможные перемещения

Возможное перемещение является воображаемым (виртуальным) перемещением в данный момент времени. В отличие от него действительное перемещение точки происходит в определенном направлении под действием сил при непрерывном изменении времени. Действительное перемещение точки является одним из числа возможных перемещений этой точки. Поэтому возможное перемещение точки является вариацией, а действительное перемещение – дифференциалом.

Если \mathbf{r} – радиус-вектор точки, то $\delta \mathbf{r}$ – возможное перемещение точки, а $d\mathbf{r}$ – действительное. Тогда разложение возможного перемещения имеет вид: $\delta \mathbf{r} = \delta x \mathbf{e}_x + \delta y \mathbf{e}_y + \delta z \mathbf{e}_z$, где $\delta x, \delta y, \delta z$ – проекции возможного перемещения на оси координат. Действительное перемещение определяется выражением $d\mathbf{r} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z$, где dx, dy, dz – проекции действительного перемещения на оси координат, причем $\delta x = dx, \delta y = dy, \delta z = dz$.

Вернемся к рисунку 5. Для точки, изображенной на рисунке, возможным перемещением является любое перемещение в касательной плоскости поверхности в данной точке.

Дадим еще одно важное определение. Идеальными называются связи, сумма работ сил реакций которых на любых возможных перемещениях точек системы равна нулю, т.е.

где R - равнодействующая сил реакций связи, действующих на i -ю точку, δr_i - возможное перемещение i -й материальной точки системы.

Примерами идеальных связей могут служить: идеально гладкие плоскости и поверхности, абсолютно жесткий стержень, абсолютно твердое тело и т.д.

После изложения основных понятий перейдем к изложению основных принципов.

1.3 Принцип возможных перемещений

Положением равновесия называется такое положение системы, в котором она будет находиться все время, если в начальный момент времени она находилась в этом положении и скорости всех ее точек были равны нулю.

Для равновесия системы материальных точек, подчиненной идеальным стационарным связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма работ задаваемых сил на любых возможных перемещениях точек системы равнялась нулю

Или в проекции на оси координат:

Принцип возможных перемещений представляет собой самый общий принцип аналитической статики. Из него можно получить условия равновесия любой конкретной механической системы. В

простейших, частных случаях, принцип был известен еще во времена Галилея под названием «золотого правила механики». То, что выигрывается в силе, то теряется в перемещении или скорости. Особенно эффективно применение принципа возможных перемещений при решении задач о равновесии систем твердых тел.

Если не все связи, наложенные на систему, являются идеальными (имеются негладкие поверхности), то к задаваемым силам следует добавить силы трения и приравнять к нулю сумму работ не только задаваемых сил, но и сил трения, на любых возможных перемещениях точек системы.

Если требуется определить какую-либо силу идеальной связи, то следует, применяя принцип освобождаемости от связей, отбросить соответствующую связь и заменить ее искомой силой реакции. Затем при составлении уравнения равновесия добавить к заданным силам эту силу реакции. Решив полученное уравнение, найти искомую силу реакции.

Можно рекомендовать следующую последовательность решения задач о равновесии твердых тел и систем тел с помощью принципа возможных перемещений:

1. Показать на схеме задаваемые силы;
2. При наличии неидеальных связей добавить соответствующие силы реакций связей;
3. Для определения конкретной реакции связи мысленно отбросить соответствующую связь и заменить ее искомой силой реакции;
4. Построить «деформированную» схему системы, для этого придав возможное перемещение одной из точек системы выразить возможные перемещения точек приложения сил в зависимости от заданного перемещения;
5. Вычислить сумму работ всех заданных сил и сил реакций связей на возможных перемещениях их точек приложения и приравнять эту сумму нулю;
6. Решить составленное уравнение равновесия, определить искомую силу реакции связи для определения всех сил реакции связей.

Пример: Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, (рис. 6), состоит из стержней 1, 2, 3 и ползунов , соединенных друг

с другим и с неподвижной опорой шарнирами. К ползуну прикреплена пружина с коэффициентом жесткости k , к ползуну приложена сила Q , а к стержню 1 – пара сил с моментом M . Длина стержня l . Для заданного положения механизма определить деформацию пружины.

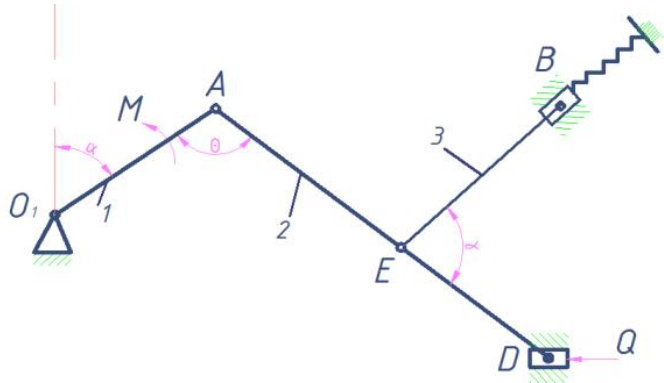


Рис. 6 Пример расчета механизма с помощью принципа возможных перемещений

1. Изображаем действующие на механизм активные силы: силу Q , пару сил с моментом M . Мысленно отбрасывая пружину, заменяем ее действие на механизм силой упругости $F_{\text{пруж}}$, предполагая, что пружина растянута.

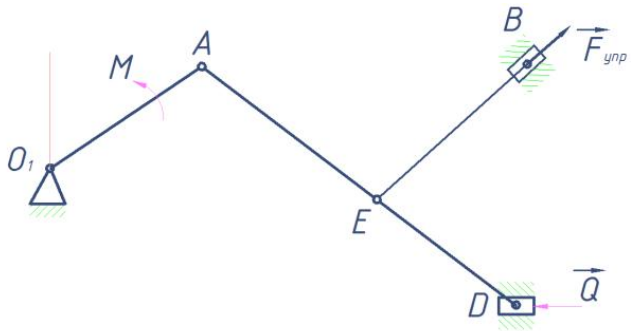


Рис. 7 Расчетная схема

2. Построим «деформированную» схему системы. Система является системой с одной степенью свободы. Сообщим системе возможное перемещение - поворот стержня вокруг точки . Тогда точки получают перемещения (рис. 8).

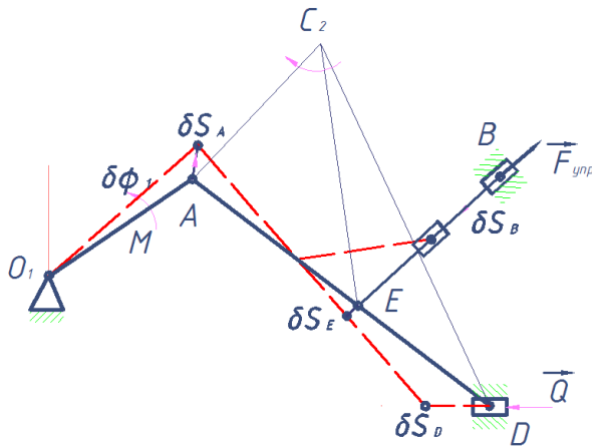


Рис. 8 «Деформированная» схема

Выразим перемещения всех точек системы через возможное перемещение . При расчетах учтем, что зависимость между возможными перемещениями точек будет такая же, как и между соответствующими скоростями звеньев механизма при его движении и

воспользуемся известными из кинематики соотношениями для скоростей в случаях вращательного и плоского движения звеньев.

Вычислим и изобразим . Очевидно, что , причем

Определим и изобразим , учитывая, что проекции и на прямую должны быть равны, т.е.

Для определения , сначала найдем . Для этого построим мгновенный центр скоростей стержня 2 и покажем направление поворота стержня 2 вокруг . Так как , то - равносторонний и - высота его, т.к. . Тогда перемещение и будет направлено по прямой с учетом направления вращения с учетом теоремы о проекциях скоростей точек плоской фигуры на прямую, получаем

Значение находим из условия равенства проекций на прямую :

3. Составляем уравнение работ всех активных сил на возможных перемещениях точек системы

Или, подставляя значения , получим

Сокращаем на имеем:

Из этого уравнения находим значение и определяем

Следует описанную процедуру повторить для каждой силы.

1.4 Принцип Д'Аламбера

Возможность перенести приемы и методы решения статических задач на задачи динамики дает принцип Д'Аламбера. Формально, он не является вариационным принципом механики, но без его изучения невозможно применение более общего вариационного принципа Д'Аламбера-Лагранжа.

Прежде чем сформулировать принцип Д'Аламбера, дадим некоторые определения.

Рассмотрим систему n материальных точек, на которую наложены стационарные и идеальные связи (рис. 5). Массы точек обозначим m_v . Равнодействующую заданных сил, приложенных к v -й точке, обозначим \vec{F}_v , а равнодействующую реакций связей, приложенных к v -й точке через \vec{R}_v . Тогда, на основании второго закона Ньютона, для каждой точки системы будем иметь:

(8)

Вектор $m_v \vec{a}_v$ называется силой инерции v -й точки.

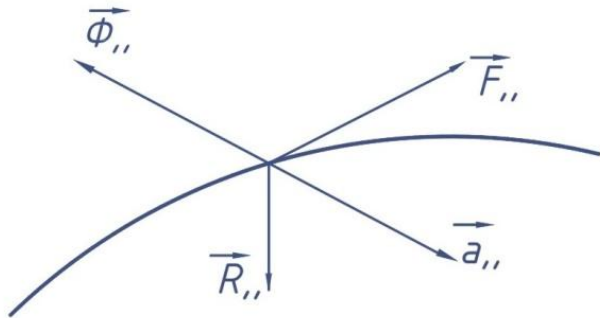


Рис. 9 Принцип Д'Аламбера

Получаем принцип Д'Аламбера если ко всем действующим на точки системы активным силам и пассивным силам (реакции связей) добавим силы инерции для каждой материальной точки, то получим уравновешенную систему сил.

Число векторных уравнений (8) равно числу материальных точек системы.

Принцип Д'Аламбера позволяет перенести приемы и методы решения статических задач на задачи динамики.

Если рассматривается движение твердого тела, то применяя принцип Д'Аламбера, следует составить уравнения «равновесия» этого тела, включив в них задаваемые силы, силы реакций связей и силы инерции.

Важным этапом реакции задач динамики несвободной системы материальных точек является приложение сил инерции к телу. Как известно из статики, систему сил можно привести к силе, равной главному вектору и к паре сил с моментом, равным главному моменту. Рассмотрим приведение сил инерции для различных случаев движения твердого тела.

1. При поступательном движении твердого тела силы инерции приводятся к равнодействующей, приложенной к центру тяжести с тела. Равнодействующая равна по модулю произведению массы тела на ускорение любой точки и направлена противоположно этому ускорению (рис. 10).

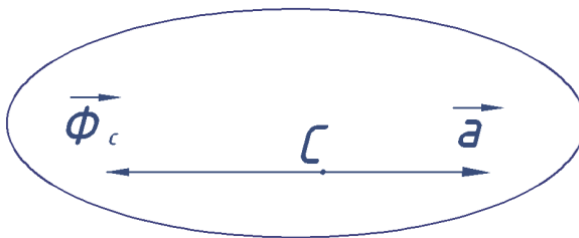


Рис.10 Поступательное движение

2. При вращении плоской фигуры вокруг перпендикулярной к ней неподвижной оси сила инерции приводятся к силе, равной главному вектору , приложенной в центре тяжести тела и к паре сил с моментом, равным главному моменту (рис. 11).

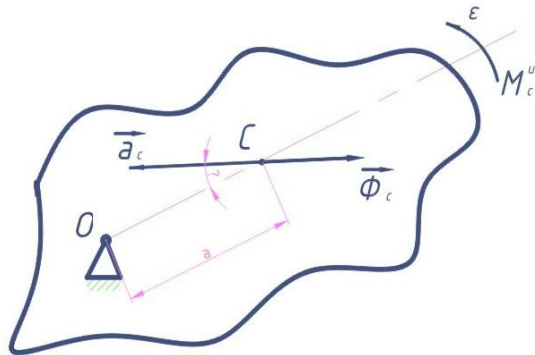


Рис. 11 Вращательное движение тела

Главный вектор сил инерции по модулю равен произведению массы тела на ускорение его центра тяжести и направлены в сторону, противоположную этому ускорению: _____, причем _____.

Главный момент сил инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести C , параллельно оси вращения, равен по модулю произведению момента инерции тела относительно оси на модуль углового ускорения тела. Знак главного момента сил инерции противоположен знаку проекции углового ускорения: _____, где _____ - момент инерции твердого тела. В случае, когда за центр приведения выбрана точка _____, лежащая на неподвижной оси в выражении для главного момента сил инерции вместо _____ входит _____, т.е. _____, где _____.

3. При плоскопараллельном движении тела (рис. 12) силы инерции приводятся к силе, равной главному вектору _____, приложенной в центре приведения, и к паре сил, момент которой равен главному моменту относительно оси, проходящей через центр приведения перпендикулярно к неподвижной плоскости, т.е. _____.

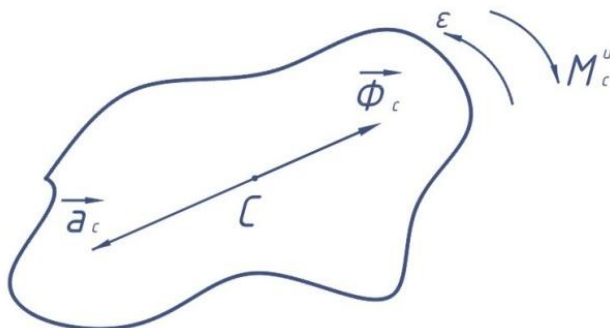


Рис.12 Плоское движение твердого тела

Решать задачи с помощью принципа Д'Аламбера удобно в случаях, когда требуется определить скорости и ускорение точек, угловые скорости и угловые ускорения твердых тел, динамические реакции.

Рекомендуемая последовательность решения задач с помощью принципа Д'Аламбера:

1. Построить расчетную схему задачи;
2. Добавить к задаваемым силам и силам реакций связей силы инерции материальных точек системы;
3. Выбрать систему координат;
4. Составить уравнения равновесия полученной системы сил;
5. Решив систему уравнений, определить искомые величины.

Пример. Вертикальный вал, закрепленный подпятником и подшипником (рис. 9), вращается с постоянной угловой скоростью. Ломаный однородный стержень массой m , длиной l состоящий из частей 1,2,3, прикреплен к валу шарниром и невесомым стержнем 4. Определить реакции шарнира и стержня 4.

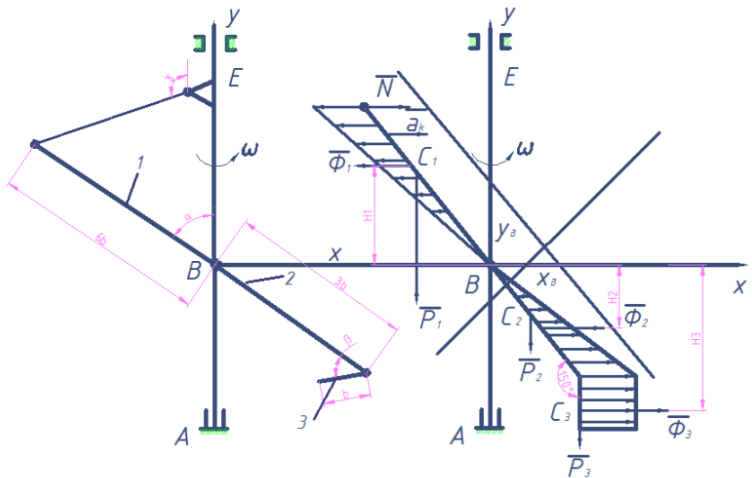


Рис.13 Пример расчета системы с помощью принципа Д'Аламбера

1. Построение расчетной схемы задачи.

Изобразим вал и прикрепленный к нему ломаный стержень в соответствии с заданными углами. Проведем вращающиеся вместе с валом координатные оси так, чтобы стержень лежал в плоскости Oxy и изобразим действующие на него внешние силы: силы тяжести P_1, P_2, P_3 . В соответствии с условиями задачи массы и веса стержней 1,2,3 пропорциональны их длинам:

Расчленим систему по шарниру (рис. 10) и рассмотрим ломаный стержень. Со стороны вала на стержень действуют реакции шарнира X_B, Y_B и реакция стержня 4.

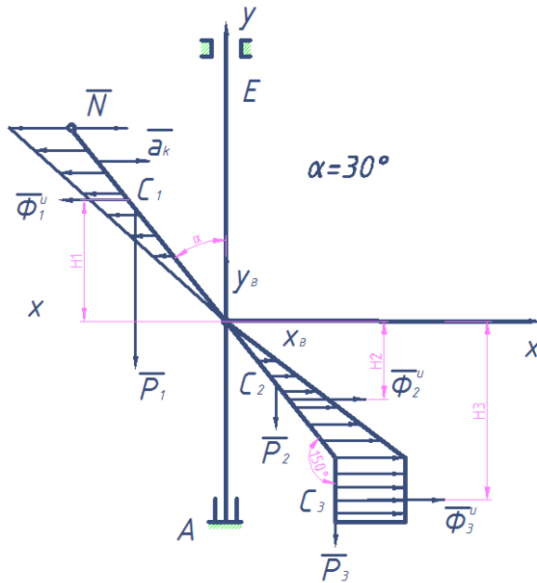


Рис. 14 Расчетная схема

2. Силы инерции.

Присоединим к задаваемым силам силы инерции элементов стержня. Так как стержень вместе с валом вращаются равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения, направленные к оси вращения по модулю равные $\omega^2 r$, где r – расстояние до оси вращения. Тогда силы инерции будут равны $F_i = m_i \omega^2 r$, где m_i – масса элемента. Направлена будут от оси вращения. Поскольку ω пропорциональна $\dot{\phi}$, то эпюры этих параллельных сил образуют для частей 1 и 2 треугольники, а для части 3 – прямоугольник (рис. 14).

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Как известно модуль главного вектора сил инерции равен $F_i = m_i \omega^2 r_c$, где m_i – масса тела, r_c – ускорение его центра масс. Тогда для частей стержня получим:

ия центров масс частей стержня равны:

—
расстояния центров масс частей от оси вращения. Подставляя значения , получим:

При этом линии действия равнодействующих и пройдут через центры тяжести соответствующих треугольников, т.е. на расстояниях и от оси , а равнодействующая приложена в центре тяжести прямоугольника 3 и проходит на расстоянии от оси , т.е.

—

—

—

3. Составляем уравнения равновесия для ломаного стержня.

Согласно принципа Д'Аламбера, задаваемые силы, включая реакции связей, и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для полученной плоской системы сил три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum \\ \sum \\ \sum \end{aligned}$$

Решив полученную систему, найдем реакции:

.

Если бы надо было найти реакции подшипника и подпятника , то следовало бы приложить найденные реакции к

вертикальному валу в обратных направлениях и рассмотреть «равновесие» вала.

1.5 Общее уравнение динамики системы материальных точек (принцип Д'Аламбера-Лагранжа)

Для материальных точек несвободной системы имеют место следующие равенства:

(9)

где v - количество точек системы, m_v - масса v -й точки, a_v - ее ускорение, R_v - равнодействующая активных сил и сил реакций, действующих на эту точку. Считая связи идеальными, для любого положения системы имеем:

Подставляя в выражение (10) значение R_v из уравнения (9), получим

Равенство (11) называется общим уравнением динамики. При движении системы материальных точек, подчиненной идеальным связям, сумма работ задаваемых сил и сил инерции на возможных перемещениях точек системы равна нулю.

Если

$$\sum_{v=1}^v \delta W_v = 0 \quad (12)$$

То общее уравнение динамики принимает вид:

Общее уравнение динамики является аналогом принципа возможных перемещений для случая движения системы материальных точек.

Из общего уравнения динамики вытекают основные уравнения движения системы. Из него же можно получить основные теоремы динамики системы. Поэтому Лагранж положил общее уравнение динамики в основу аналитической механики.

Большим преимуществом общего уравнения по сравнению с другими теоремами динамики является отсутствие в его формулировке сил реакций идеальных связей. Если не все связи являются идеальными (например, присутствует трение), то применяя общее уравнение динамики, следует к задаваемым силам добавить силы реакций неидеальных связей.

Перед рассмотрением примера покажем вычисление суммы работ сил инерции на возможных перемещениях для различных случаев движения твердого тела.

1. При поступательном движении

где \vec{F}_i - равнодействующая сил инерции ($\vec{F}_i = -m\vec{a}$), $d\vec{r}$ - возможное перемещение любой точки тела.

2. При вращении вокруг неподвижной оси

где M_i - главный момент сил инерции относительно оси вращения ($M_i = -J\alpha$), $d\vec{r}$ - возможное перемещение тела.

3. При плоском движении

где \vec{F}_i - главный вектор сил инерции ($\vec{F}_i = m \vec{a}$ - ускорение центра тяжести тела), $M \vec{r}_i$ - главный момент сил инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести тела, перпендикулярно к плоскости его материальной симметрии ($M \vec{r}_i = J \vec{\alpha}$), \vec{s} - возможное перемещение центра тяжести твердого тела, δ - возможное угловое перемещение твердого тела.

Рекомендуемая последовательность решения задач с помощью общего уравнения динамики:

1. Построить расчетную схему задачи, изобразив на рисунке задаваемые силы и силы реакций, соответствующие неидеальным связям.
2. Подсчитать и изобразить главные векторы и главные моменты сил инерции масс системы.
3. Дать возможное перемещение одной из точек системы и выразить возможные перемещения точек приложения всех сил, включая силы инерции, через это перемещение.
4. Вычислить суммы работ всех задаваемых сил и сил инерции на возможных перемещениях точек системы. Составить общее уравнение динамики, приравняв сумму работ всех сил нулю.
5. После сокращения уравнения на заданное возможное перемещение определить искомую величину либо проинтегрировать его с целью нахождения кинематических характеристик системы точек.

Пример: При движении кулака веса P по горизонтальной плоскости направо стержень веса p поднимается в вертикальных направляющих вверх. Найти ускорение кулака a , если к нему приложена слева направо горизонтальная сила F . Коэффициент трения скольжения кулака о горизонтальную плоскость равен μ .

Покажем неподвижные координатные оси Ox, Oy (рис. 11). Система имеет одну степень свободы, так как положение кулака на плоскости определяет положение стержня AB .

Так как ускорение кулака направлено направо, то проекция равнодействующей сил инерции кулака на ось равна

$$-m_1 a_1$$

а проекция на ось равнодействующей сил инерции стержня, имеет вид:

$$-m_2 a_2 \cos \alpha$$

Дадим кулаку возможное перемещение по горизонтали на право. Тогда стержень получит возможное перемещение и определяется варьированием выражения .

Находим сумму работ заданных сил, силы трения и сил инерции на возможных перемещениях точек системы

где

Или получаем после сокращения на

$$-m_1 a_1 \Delta x_1 - m_2 a_2 \Delta x_2 \cos \alpha = 0$$

Откуда определяем искомое ускорение

$$a_1 = \frac{m_2 a_2 \cos \alpha}{m_1 + m_2 \cos^2 \alpha}$$

1.6 Уравнения Лагранжа второго рода

Постановка задачи остается такой же, как и в предыдущем параграфе. Рассматривается движение системы и материальных точек, подчиненной идеальным связям.

Обобщенными координатами называются независимые параметры, однозначно определяющие положения точек материальной системы. Число степеней свободы системы материальных точек равно числу независимых обобщенных координат.

Например, кривошипно-шатунный механизм является системой с одной степенью свободы. В качестве обобщенной координаты может быть взят угол поворота кривошипа, который однозначно определяет положения всех точек системы.

Радиус-вектор \mathbf{r}_i , определяющий положение i -й точки системы с степенями свободы, является в случае нестационарных связей функцией обобщенных координат и времени

Где q_1, q_2, \dots, q_n – обобщенные координаты, t – время.

Тогда скорость этой точки равна

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

Возможное перемещение этой точки, выраженное вариацией радиус-вектора $\delta \mathbf{r}_i$, имеет вид:

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n} \delta q_n$$

где $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ – обобщенные возможные перемещения.

Обобщенными силами Q_1, Q_2, \dots, Q_n называются коэффициенты, стоящие в выражении суммы работ задаваемых сил на соответствующих обобщенных возможных перемещениях. Число обобщенных сил равно числу обобщенных координат, т.е. числу степеней свободы системы.

Обобщенная сила вычисляется по формуле:

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

где n – число материальных точек системы, s – число степеней свободы, \mathbf{F}_i – равнодействующая задаваемых сил, приложенных к i -й точке системы.

Выражение обобщенной силы через проекции задаваемых сил на оси координат имеет вид.

$$Q_j = \sum_{i=1}^n F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j}$$

где F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} – проекции сил на оси координат.

Если силы, действующие на точки системы потенциальны, то обобщенные силы равны взятым с обратным знаком частным производным от потенциальной энергии системы по соответствующим обобщенным координатам, т.е.

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

Так как вычисление обобщенных сил является одним из важных этапов решения задач с помощью уравнений Лагранжа второго рода, поясним сказанное выше на примере.

Общим приемом является вычисление обобщенных сил как коэффициентов в выражении суммы элементарных работ задаваемых сил на соответствующих обобщенных возможных перемещениях. Порядок в этом случае следующий:

1. Определить число степеней свободы системы, выбрать соответствующие обобщенные координаты;
2. Изобразить все задаваемые силы системы;
3. Если не все связи идеальные, то добавить к задаваемым силам соответствующие силы реакций связей;

4. Дать независимые обобщенные возможные перемещения системе в числе, равном числу обобщенных координат;
5. Вычислить сумму работ всех задаваемых сил, включая силы реакций неидеальных связей, на обобщенном возможном перемещении (при этом все остальные возможные перемещения считать равными нулю, т.е. δ). Тогда обобщенная сила будет равна коэффициенту при .

Если силы, действующие на точки системы, потенциальны, то после выбора обобщенных координат надо вычислить потенциальную энергию системы. Тогда обобщенная сила равна

—

Данный способ более эффективный, однако, он применим лишь тогда, когда все задаваемые силы потенциальны.

Пример: Выбрать обобщенную координату и определить соответствующую ей обобщенную силу для кулисного механизма (рис. 16) к концу штока кулисы прикреплен пружина, коэффициент жесткости которой равен . При крайнем правом положении кулисы пружины недеформирована. Вес кривошипа , - длина кривошипа. Массами и пружины пренебречь. Кривошип считать однородным стержнем.

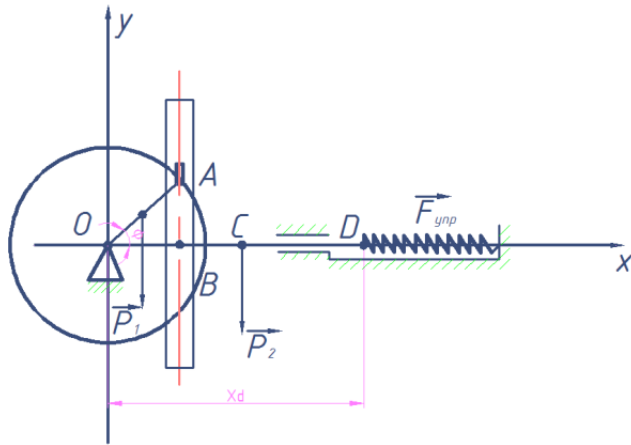


Рис. 16 Вычисление обобщенной силы

Кулисный механизм имеет одну степень свободы, так как положения всех его точек однозначно определяется одним параметром, например, углом поворота кривошипа. Выберем в качестве обобщенной координаты угол φ .

Покажем задаваемые силы: P_1 – вес кривошипа, P_2 – вес рамки и штока, $F_{упр}$ – сила упругости пружины. В положении, показанном на рисунке 12, пружина растянута. Сила упругости равна $F_{упр} = kx_d$, где удлинение пружины равно разности абсцисс точки D в ее начальном и промежуточном положениях. Так как $x_d = R \sin \varphi$, а $x_{d0} = R \sin \varphi_0$, то $F_{упр} = kR(\sin \varphi - \sin \varphi_0)$. Тогда $\delta W_{упр} = kR(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \delta \varphi$.

Дадим системе обобщенное возможное перемещение $\delta \varphi$ в направлении возрастания угла поворота, против часовой стрелки.

Найдем возможное перемещение точки D пружина. Для этого вычислим вариацию абсциссы x_d .

Вычислим сумму работ задаваемых сил на возможном перемещении $\delta \varphi$.

—

Работа силы веса при горизонтальном перемещении ее точки приложения равна нулю.

Подставив значения , получим

—

Тогда искомая обобщенная сила есть коэффициент, стоящий в выражении для при , т.е.

—

Рассмотрим другой вариант вычисления , так как все задаваемые силы потенциальны, то обобщенную силу можно вычислить по формуле —, где — потенциальная энергия системы. Она равна .

Потенциальная энергия силы веса равна

— - ордината центра тяжести кривошипа . Тогда — . Потенциальная энергия силы веса равна нулю, т.к. ее точка приложения перемещается по горизонтали, т.е.

Потенциальная энергия силы упругости пружины будет — . Подставив значение для , получим

—

Окончательно потенциальная энергия системы равна

— —

Тогда обобщенная сила равна

После рассмотрения примера на вычисления обобщенной силы рассмотрим кратко теоретические сведения об уравнениях Лагранжа второго рода. Для их получения воспользуемся общим уравнением динамики для системы материальных точек

В обобщенных координатах оно принимает вид

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q$$

где q - обобщенные координаты, $\frac{d^2 q}{dt^2}$ - обобщенные возможные перемещения, $\frac{\partial U}{\partial q}$ - обобщенные силы системы, T - кинетическая энергия системы.

Так как q являются независимыми обобщенными возможными перемещениями, то уравнение (25) удовлетворяется лишь при условии, что коэффициенты, стоящие при возможных перемещениях, равна нулю, т.е.

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0$$

Уравнения (26) называются уравнениями Лагранжа второго рода. Число уравнений равно числу независимых обобщенных координат.

Если задаваемые силы системы потенциальны, то уравнения Лагранжа можно записать в виде:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{---} & \text{---} & \text{---} \\
 \text{---} & \text{---} & \text{---} \\
 \text{---} & \text{---} & \text{---}
 \end{array}$$

Если ввести функцию Лагранжа , равную разности кинетической и потенциальной энергий, т.е. , то уравнения (27) примут вид

$$\begin{array}{ccc}
 \text{---} & \text{---} & \\
 \text{---} & \text{---} & \\
 \text{---} & \text{---} &
 \end{array}$$

Уравнения Лагранжа являются более общими уравнениями, чем те, которые получаются из основных теорем динамики, поскольку существуют при произвольных голономных идеальных связях, без ограничений на возможные перемещения системы.

Кроме этого в полученные уравнения не входят реакции связей. Движение определяется только активными силами. Для составления уравнений движения достаточно определить кинетическую энергию системы и обобщенные силы.

Составление уравнений Лагранжа рекомендуется проводить в следующей последовательности:

1. Определить число степеней свободы системы;
2. Выбрать систему координат и задать независимые обобщенные координаты в числе , равном числу степеней свободы;
3. Определить обобщенные силы системы , соответствующие выбранным обобщенным координатам (см. предыдущий пример);
4. Вычислить кинетическую энергию системы;

5. Вычислить частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям \dot{q}_1, \dot{q}_2 , т.е. $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}$, а затем производные от них по времени, т.е. $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}$;
6. Определить частные производные от кинетической энергии по обобщенным координатам: $\frac{\partial T}{\partial q_1}, \frac{\partial T}{\partial q_2}$;
7. Составить уравнение Лагранжа.

Пример. Определить угловое ускорение кривошипа планетарной передачи, расположенной в вертикальной плоскости (рис. 13). Зубчатое колесо 2 находится во внутреннем зацеплении с неподвижным колесом 1. Колесо 2 приводится в движение посредством кривошипа 3, к которому приложена пара сил с моментом M . Вес кривошипа равен G , колеса 2 - G_2 , - радиус колеса 2, r_1 - радиус неподвижного колеса 1.

Колесо 2 считать неподвижным однородным круглым диском, кривошип 3 - тонким однородным стержнем. Силами сопротивления пренебречь.

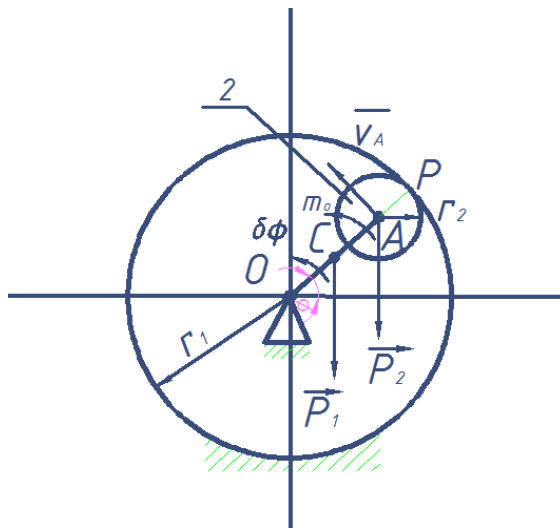


Рис. 17 Составление уравнений Лагранжа

Планетарная передача имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол φ , отсчитываемый от горизонтальной оси против часовой стрелки. Тогда уравнение Лагранжа принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}$$

Все связи, наложенные на систему идеальны. Приложим к телам системы силы: P_1 - вес кривошипа, P_2 - вес колеса 2 и пару сил с моментом M к кривошипу.

Дадим кривошипу возможное угловое перемещение $\delta \varphi$ в направлении возрастания угла φ .

Вычислим сумму работ задаваемых сил на возможном перемещении

Так как $\delta \varphi$ - произвольное, а $\delta \varphi \neq 0$, то

—

Тогда обобщенная сила , соответствующая координате , равна

—

Кинетическая энергия системы равна

,

где — кинетическая энергия кривошипа , — энергия зубчатого колеса 2. Энергия кривошипа равна — , где

— — — момент инерции кривошипа. Тогда

—

Кинетическая энергия колеса 2, совершающего плоское движение, равна — — .

Скорость точки — конца кривошипа равна

Скорость точки , принадлежащей колесу 2, равна

Приравнявая оба выражения, находим

—

Момент инерции зубчатого колеса равен

—

Тогда кинетическая энергия колеса 2 равна

— —

Кинетическая энергия системы равна

Вычислим частную производную от по обобщенной скорости

— — ,

а затем производную по времени

— — —

Так как кинетическая энергия системы не зависит от обобщенной координаты , получаем — .

Составляем уравнение Лагранжа

_____ —

Отсюда определяем искомое угловое ускорение кривошипа

Глава 2. Пример выполнения курсовой работы.

Рассмотрим работу механизма прессования, кинематическая схема которого представлена на рис. 18.

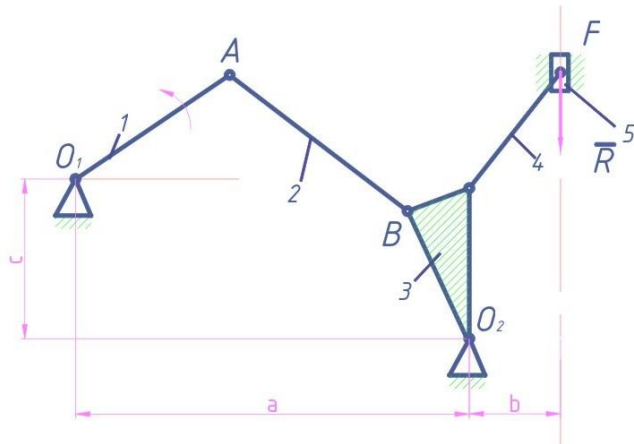


Рис. 18 Кинематическая схема механизма прессования

Механизм состоит из следующих звеньев:

- кривошипы (вращательное движение);
- шатуны (плоское движение);
- поршень или ползун (поступательное движение).

Ведущим звеном является кривошип , к которому приложен вращающий момент от электродвигателя. Положение механизма определяется углом , отсчитываемым от горизонтальной оси против хода часовой стрелки.

Варианты заданий приведены в таблице 1. Номер варианта для каждого студента определяет преподаватель.

Для всех вариантов примем размеры механизма одинаковыми:

Варианты заданий

№ вар.	Угол поворота, град.			Сила, Н			Момент силы, Н м
				P ₁	P ₃	P ₅	М
1	0	10	20	P	2P	P	P
2	20	30	40	2P	2P	4P	1,5P
3	40	50	60	P	1,5P	P	2P
4	60	70	80	1,5P	2P	3P	0,5P
5	80	90	100	2,5P	P	3P	3P
6	100	110	120	3P	2P	P	-P
7	120	130	140	P	1,5P	2,5P	-2P
8	140	150	160	0,5P	1,5P	1,5P	-3P
9	160	170	180	4P	2P	5P	P
10	100	190	200	P	2,5P	4,5P	1,5P
11	200	210	220	2P	P	P	2,5P
12	220	230	240	P	3P	1,5P	-0,5P
13	240	250	260	1,5P	P	3P	4P
14	260	270	280	2P	P	0,5P	-3P
15	280	290	300	4P	2P	P	2,5P
16	300	310	320	P	1,5P	P	-P
17	320	330	340	P	2P	3P	1,5P
18	340	350	360	2P	P	0,5P	-2P
19	0	15	30	0,5P	2P	3P	3P
20	30	45	60	4P	5P	6P	-4P
21	60	75	90	1,5P	2,5P	P	-1,5P
22	90	105	120	P	3,5P	2P	2P
23	120	135	150	5P	2P	P	3P
24	150	165	180	4P	3P	P	-4P
25	100	195	210	P	0,5P	P	3P
26	210	225	240	2P	1,5P	3P	2P
27	240	255	270	1,5P	2P	P	-0,5P
28	270	285	300	P	0,5P	3,5P	-3P
29	300	315	330	3P	2P	4P	-5P
30	330	345	360	4P	3P	5P	P

2.1 Порядок выполнения задания.

1. Используя принцип возможных перемещений, определить силу , приложенную к ползуну и удерживающую механизм в равновесии, для трех последовательных близких положений механизма.
2. Выбрать, при каком из этих положений механизма значение силы будет наибольшим по абсолютной величине.
3. Для этого положения механизма, увеличив значение вращающегося момента на 15%, найти в зависимости от выбора обобщенной координаты ускорения поршня или ускорение шарнира ведущего звена механизма кривошипа , применив уравнение Лагранжа второго рода.
4. Подобрать в соответствии с вращающим моментом значение угловой скорости кривошипа , определить угловые скорости кривошипа , определить угловые скорости всех звеньев механизма и ускорения центров тяжести звеньев с помощью построения планов скоростей и ускорений.
5. Определить динамические реакции в шарнирах механизма с помощью принципа Д'Аламбера.

2.2 Требования к оформлению

Графическая часть работы выполняется на листе формата А-1 в соответствии с требованием ЕСКД. На листе должна быть изображены:

1. Три кинематических схемы механизма для заданных в варианте углов поворота кривошипа .
2. Кинематическая схема механизма для определения ускорения ползуна при помощи общего уравнения динамики.
3. Кинематическая схема механизма для определения ускорения ползуна при помощи уравнения Лагранжа второго рода.

Пояснительная записка к курсовой работе выполняется в соответствии с требованиями ГОСТа.

2.3 Пример выполнения задания

В качестве примера рассмотрим положение механизма, при котором .

Исходные данные:

1. Для определения силы, приложенной к ползуну и удерживающей механизм в равновесии, применим принцип возможных перемещений, который позволяет составить уравнение работ:

Изображаем механизм в заданном положении строго в масштабе.

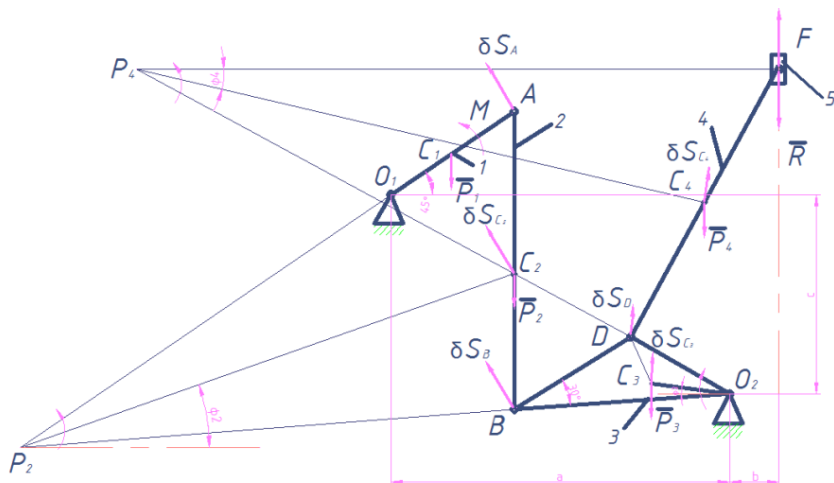


Рис. 19 Схема возможных перемещений точек механизма прессования

Рассматриваемый механизм находится под действием следующей системы уравнивающих сил: сил тяжести звеньев , вращающего момента , силы , приложенной к поршню и реакций опор.

Идеальные связи, наложенные перемещения его звеньев: поворот ведущего звена на угол (рис. 19), поворот ведомого пластинчатого кривошипа на угол , поворот шатунов вокруг своих мгновенных центров вращения (МЦВ) на углы и поступательное перемещение ползуна по вертикальным направляющим на . Положение МЦВ шатунов , точки , находим, проведя перпендикуляры к возможным перемещениям соответствующих точек механизма.

Изображаем на рис. 19 все возможные повороты звеньев и все возможные перемещения точек механизма: , а также , где - центры тяжести соответствующих звеньев.

Составляем уравнение работ (29) для заданного механизма:

—

Это уравнение можно записать и в таком виде:

—

Делаем необходимые вычисления согласно схеме механизма.

Из : — —

—————

— —

Измеряем расстояния точек механизма до МЦВ соответствующих звеньев и нужные углы:

Расстояние точек до МЦВ можно находить с помощью теорем синусов.

Выразим и вычислим перемещения всех точек механизма через . Получаем:

—

— —

2. Определение ускорения поршня

Данный механизм является механической системой с одной степенью свободы. Применяем принцип Д'Аламбера-Лагранжа, который позволяет составить уравнение Лагранжа второго рода, т.е. уравнение вида

- — —
- обобщенная координата,
 - обобщенная скорость,
 - обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате,
 - кинетическая энергия механизма.

Принимаем за обобщенную координату перемещение точки кривошипа , .

Уравнение Лагранжа второго рода будет иметь вид:

— — —

где — обобщенная скорость,

- обобщенная сила.

Составим уравнение кинетической энергии механизма как функцию обобщенной скорости и обобщенной координаты.

Кинетическая энергия рассматриваемой системы равна сумме кинетических энергий всех звеньев системы, т.е.

Кривошипы совершают вращательное движение вокруг неподвижных центров , поэтому

— — —

— моменты инерции кривошипов относительно центров вращения.

Шатуны и совершают плоскопараллельное движение, которое рассматриваем как сумму поступательного движения со скоростью центра масс и вращательного вокруг центра масс. Поэтому

$$- \quad - \quad ; \quad - \quad -$$

Ползун совершает поступательное движение вдоль вертикальных направляющих, следовательно

$$-$$

Учитывая исходные данные и согласно схеме механизма, представим кинетическую энергию механизма как функцию обобщенной скорости, т.е. .

$$- \quad - - \quad - \quad -$$

$$- \quad \quad \quad -$$

$$- \quad - \quad -$$

$$-$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$- \quad - \quad - \quad -$$

$$- \quad -$$

— —

Скорости выразим через с помощью зависимостей (33). Получим

В результате кинетические энергии звеньев и всего механизма будут такими:

Для определения обобщенной силы находим сумму работ всех сил, действующих на механизм, на возможном перемещении, соответствующем обобщенной координате.

— — —

После подставки исходных данных и зависимостей (32) и (33) находим

$$\begin{aligned} & -2,5 \cos 40,53 - 0,5 \cdot 0,597 - 4,085 \cdot 0,597 = 8,25 - -0,707 - 3 \cdot 0,8 \\ & 48 \cdot 0,915 - 0,9903 \cdot 0,416 - 2,5 \cdot 0,9925 \cdot 0,53 - 4,585 \cdot 0,597 = 0,751 \end{aligned}$$

Откуда

—

Составляем уравнение Лагранжа второго рода, вида (36)

3. Определяем динамические реакции в шарнирных соединениях механизма, применяя принцип Д'Аламбера, согласно которому все активные силы, действующие на механизм, реакции связей и приложенные к каждому звену силы инерции образуют уравновешенную систему сил.

Силы инерции точек звеньев приводим к центрам масс соответствующих звеньев.

Угловые скорости звеньев можно найти с помощью МЦС (см. рис. 20 и зависимости (32)), приняв значение угловой скорости ведущего звена, соответствующего выбранному вращающему моменту.

Угловые ускорения звеньев и ускорения центров масс звеньев находим построением плана ускорений механизма.

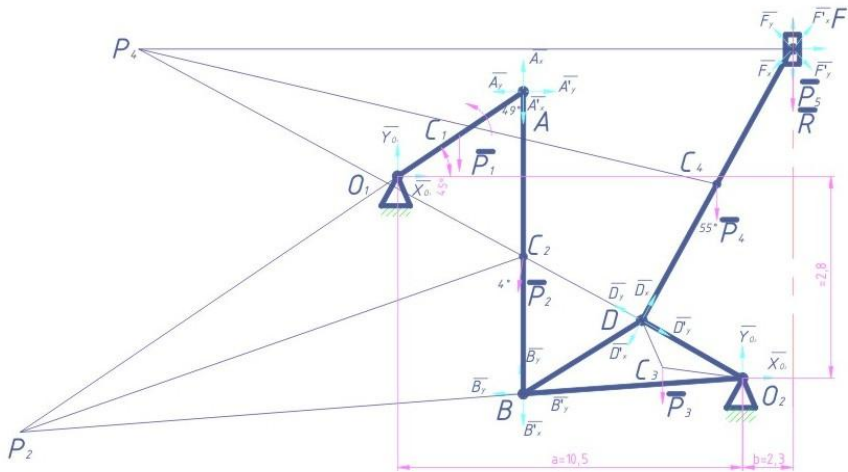


Рис. 20 Расчетная схема механизма по принципу Д'Аламбера

Находим и наносим на рис. 20 расчетной схемы механизма силы инерции и моменты инерционных сил звеньев механизма.

Опорные реакции во внешних связях раскладываем на горизонтальные и вертикальные составляющие:

Реакции внутренних связей (шарниры) раскладываем по направлению шатуна и перпендикуляру к нему, учитывая третий закон динамики.

Так, например

Составляя по три уравнения равновесия для каждого звена и решая затем систему из 14 уравнений, находим все опорные реакции. Так, например, из уравнения моментов, составленного для шатуна относительно точки (см. рис. 20), находим ит.д. последовательность определения реакций получается следующей:

AB:

O_1A :

AB:

DF:

O_2BD :

DF:

Поршень F:

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии рассмотрены некоторые из вариационных принципов механики. Авторы рассматривают пособие как первый шаг к изучению аналитической механики и планируют расширить круг рассматриваемых задач. В дальнейшем мы хотим рассмотреть применение принципов аналитической механики к решению задач о малых колебаниях и устойчивости механических систем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М: Наука, 1995. – 416 с., ил. – ISBN.
2. *Бать М.И.* Теоретическая механика в примерах и задачах. В 3 т. М.И. Бать, Г.Ю. Джанилидзе, А.С. Кельзон, 1991. – ISBN.
3. *Кильчевский Н.А.* Курс теоретической механики, т. 2 – М. «Наука», 1977. – 544 с.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. – М: Наука, 1966. – 300 с.
5. *Березкин Е.Н.* Курс теоретической механики. – М. Изд-во МГУ, 1974. – 645 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава 1. Вариационные принципы механики	4
1.1 Понятие вариации функции	5
1.2 Свободные и несвободные системы связи и их классификация	7
1.3 Принципы возможных перемещений	13
1.4 Принцип Д'Аламбера	18
1.5 Общее уравнение динамики системы материальных точек (принцип Д'Аламбера)	25
1.6 Уравнение Лагранжа второго рода	30
Варианты заданий	42
2.1 Порядок выполнения задания	43
2.2 Требования к оформлению	43
2.3 Пример выполнения задания	44
Заключение	54
Библиографический список	55

Учебное издание

Вариационные принципы механики

Учебное пособие
для студентов специальностей 151000.62 – Технологические машины и
оборудование, 190100.62, 190109.65 – Наземные транспортно-
технологические комплексы

Составители: Ахтямов Александр Викторович
Спиридонова Лидия Николаевна
Новикова Елена Николаевна

Подписано в печать Формат 60х84/16. Усл. печ. л. Уч.-изд. л.
Тираж экз. Заказ Цена
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В.Г. Шухова
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46